共通テスト2022考察

BAYESEE
スクール長 西本 啓一郎

まえがき

簡単に個人的感想を述べる。

過去 20 年分の問題の中で最も残酷なテストだと考える。
文字量，計算量，共感しにくいシチュエーションなどなど正攻法では時間内に終えるのがかなり難しい。反面、難易度は高くないので，丁寧に解いていけば数学が得意でないという受験生でもそれなりに得点できる。ここが問題である。数学を得点源としている人にとっては難易度の低さがマイナスなのだ。この手のテストでは得意な人が輝けない。テストは本来，ふるいにかけて序列をつけるものであるがこのテストの目的がそこにあるとは到底考えられない。「えっ？何を測っているの？我慢比べ？」中でも，数列は受験生を困惑させたのではないだろうか。高校数学の範囲で強引に日常生活にありそうな問題を作ろうというのが無茶である。青春スポ根漫画的なシチュエーション（数列の問題における謎の往復）が日常的な話といえようか。そして，鼻につくのは「太郎と花子の戯れ」，何回出てくるんだと。。。お腹いっぱいである。せっかく奥深い議論をしているのに，台無しである。（共通テストでなければ良問と言ってもよい）

我々は数学の問題を解くとき，

- 内容を理解する（読解力）
- 道筋を立てる（思考力，帰着力）
- 突き進む・切り捨てる（判断力）
- 処理する・計算する（計算力）

と様々な力を駆使している。センター試験までは，そのバランスが良く数学が得意な人は，時間に余裕があったのでミスさえなければ満点が取れた。テストとしての本来の目的が正常に果たされていたのである。しかし，共通テストになってからは，上記のバランスが崩れ，数学の総合力を見るという本来の目的が果たされなくなっているのではないだろうか。

さて，問題に対する不満ばかり言っていても議論が先にいかないので本題に入る。あえて今回の入試問題を悪問と評することにする。だた…悪問であっても満点を取る人が一定数いる。ずば抜けて IQ が高い，処理能力が高いなどの奇人を入れなくてもである。マーク式問題の抜け道をつくことと高度な判断力を持ってしてやれば，時間内に満点をとることができる。解説では正攻法と抜け道を使って問題を解いていく。抜け道を利用した対策をしても記述力はつかないし，本当の意味で理解したとは言えないので，受験生はあくまで一つの技として頭の片隅にしまっておいてほしい。

$\boxed{\text{総評，想定解答時間}}$

第 1 問（想定解答時間 5〜10 分）

ほぼ計算をしないので，唯一正攻法で時間内に処理できる問題であったかと思われる。ただ，いくつかの判断ポイントを誤るとドツボにはまる恐ろしい問題でもあるので注意したい。

第 2 問（想定解答時間 10〜15 分）

こちらも第 1 問同様，いかに計算しないかが鍵になる。ただ，微積分の問題なので否が応でも計算が必要となる部分がある。そこの計算を丁寧にやり切れるかと，なんと言っても最後の $\boxed{\text{ネノ}}$ である。決して難しい問題ではないのだが，数学 IA での傷心，たくさんの文章を読んできた受験生には酷ではないだろうか。解説で説明するようなテクニックでやり過ごしたい。

第 4 問（想定解答時間 15〜20 分，裏技で 10 分）

正攻法ではどう解いても時間がかかる問題児。中学受験の問題作成者が乗り移ったのかと思われるダイヤグラムと異常に長い問題文。問題を読んでシチュエーションを理解するだけで時間を消費するだろう。最後の $\boxed{\text{シスセ}}$ に関しても，解かせる気があるのかと疑ってしまう。そして，この問題をさらにややこしくさせているのが，「問題で提示された数列」と「追いつく時刻とその座標の数列」という二つの数列間を行き来するところである。今，何を出しているのか分からなくなった受験生も多数いたのではないだろうか。正攻法では，時間に余裕がない限り，解ききるのは難しい。解説では，マークならではの裏技を使いながら丁寧に計算をやって解いていく。

第 5 問（想定解答時間 10〜15 分）

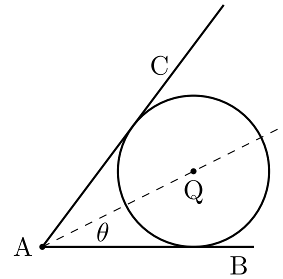
最初はオーソドックスなベクトルの問題で難なく進めれるのだが，この問題にも悪魔がいた。「また，お前らかよ。もう出てくんじゃねーよ」と思った受験生が多いのではないだろうか。私もそう思った…「もう，話が全く入ってこない。こいつら，何をしてんの？」と。こうなれば，何を考えてるのかという思考力は消し去って書いてあることをひたすら数式にするだけ。答えの妥当性も何もないが正答にはたどりつける。なんとも後味の悪い問題である。ちなみに，時間をかけて冷静に読んでみるとものすごく良い問題！なんで，共通テストで出した？と問いたい。

$\boxed{\text{解説・考え方}}$

第 **1** 問

[1] 円の接線

$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{オ}}$ までは難なく答えられたと思う。問題は $\boxed{\text{カ}}$ から先である。問題文がごちゃごちゃしてきた。ただ，そこで焦ってはいけない。問題を読むのでは，**筆者の意図**を読むべきである。太郎さんの考えは,「円の方程式に直線の式をぶちこんで」とある。となるなら，接線なのでその二次方程式が「重解をもつ（$\boxed{\text{カ}}$）」なんてのは容易にわかる。花子さんの考え方はかなりトリッキーである。接線の求め方でこういうやり方をした人はあまり見たことがない。ただ，こちらも図を使えば容易に出せる（$\boxed{\text{キクケ}}$）。以下，参照のこと。



k_0（$\boxed{\text{コサ}}$）に関しては，花子さんの求め方に従えば，$\tan 2\theta$ を出すだけなので 2 倍角の公式を使って秒殺で出せる。$\boxed{\text{シ}}$ については，それまでの話がわかっていなくても図から $0 \leqq k \leqq k_0$ であることが容易にわかる。というわけなので，状況把握さえきちんとできれば計算はほぼないので 2，3 分で蹴りがつく。

[2] 対数関数の大小関係

対数の計算ルールを知っていれば，計算することなく $\boxed{\text{ス}}$ 〜 $\boxed{\text{タ}}$ までは答えられる。問題は，$\boxed{\text{チ}}$ から先である。たった 3 問ではあるが，奥がとてつもなく深い。考察を読んで理解しながら解いていくでもいいが，読解力のない人はここで死ぬ。ここで一度，離脱をするのも良い判断だと言える。何も考えず（考察を読まず，$-1 < t < 0$，$1 < t$ から）,「$-1 < \log_a b < 0,\ 1 < t$」と置き換えられた人には勝機がみえる。これを a の正負で場合分けすれば，$\boxed{\text{チツ}}$ は瞬殺である。ラストの $\boxed{\text{テ}}$ については，何故に出したのと目を疑いたくなる。大小の判別しにくい数字を使って受験生を惑わそうという卑劣な問題と言わざるを得ない。ただ，そこに惑わされることなく先ほど出した $\boxed{\text{ツ}}$ を使えば，難なく「$\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$」が求まるはずである。ここでいかに時間をロスしないか（捨てる，計算をしない）が高得点を取るための鍵となる。

第 **2** 問

[1] グラフの波形，接線，実数解の個数

$\boxed{\text{アイ}}$ は三次関数の波形が 3 種類あることを知っていれば計算の必要はない。

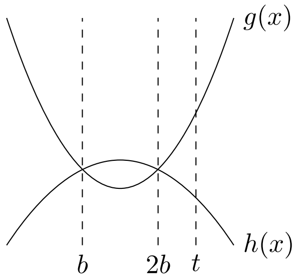
$f'(x)$ が実数解を持たない → ①
$f'(x)$ が重解を持つ → ⓪
$f'(x)$ が相異なる二つの実数解を持つ → ②

$\boxed{\text{ウエ}}$ に関しては，典型問題なので難なく解けるであろう。「極小値 $< p <$ 極大値」を考えるだけである。また，$\boxed{\text{オ}}$ ～ $\boxed{\text{キ}}$ については，闇雲に三次方程式を解くのではなく，$x = r = \sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}$ で重解を持つことから，$x^3 - 6ax + 4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} = (x - \sqrt{2}a^{\frac{1}{2}})^2(x-?)$ として，瞬時に「$? = q = -2\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}$」を出したい。

最後の $\boxed{\text{ケコ}}$ については，一番最初に与えた「a とグラフの波形の関係」を使えばそんなに難しくはない。先に ① ③ ⑤ の方が考えやすいのでこちらから吟味してやる。どうやっても ① しかありえない。⓪ ② ④ については，吟味が少し難航するかもしれないが，(1) を解いたときの図を使えば，⓪ ② があり得ないので ④ となる。正攻法でも難しくはないが，時間制限がある中で頭がパニクってしまったときは，2 つのグループに分けて吟味するとスムーズにいくことがある。

[2] 面積

$\boxed{\text{サシス}}$ は連立方程式を解くだけなので問題はないだろう。問題は，$\boxed{\text{セ}}$ 以降である。うまく考えないと時間が確実に消える。面積計算で大事なのは，どちらのグラフが積分区間で上にいるかであるがそれをどう判定するのか。今回の場合は，$b < x < 2b$ において $g(x) - h(x) = (x - b)(x - 2b) < 0$ のため，瞬時に $g(x) < h(x)$ と求めたい。ここで，以下のような簡易的なグラフを書けば，$\boxed{\text{セソタ}}$ は直ちに求まる。そして，$\boxed{\text{チ}}$ ～ $\boxed{\text{ヌ}}$ は力づくで積分すればたやすい。



ここまでは，正攻法でもなんとかいけるのだが，最後の $\boxed{\text{ネノ}}$ が問題児である。最後の最後で複雑な三次方程式を解けというのだ。こいつが解けないと，前の答えの確からしさも揺らぐ。大体はここで死亡フラグが立つ。冷静になれば，そこまで難しくないのだが，ここまで大量の文章を読んで，様々な計算をしてきた受験生には厳しいのではないだろうか。ちなみに私の場合，$2t^3 - 9bt^2 + 12b^2t - 5b^3 = (t - b)^2(2t - 5b)$ を瞬時に思いつかなかったので，解くのをやめマークの特性を利用した。答えが分数になると言っているのである。となれば，最高次の係数が 2 なので 2 分のいくつかになると瞬時に判断できる。後は先ほどのグラフの状況から $\frac{5}{2}b$ あたりが妥当ではと考え代入するだけである。ビンゴ！因数分解を思いつかなくても当たりをつけて代入するやり方はマークの抜け道であるので困ったらやってみるといいだろう。

第 4 問

(1) 漸化式

状況を判断するのにそれなりに時間はかかるが，$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ は丁寧に計算するだけなので問題ないであろう。問題は，$\boxed{\text{カ}}$ 以降である。シチュエーションが非現実的で数式を立てる気にならない…となれば，もうやることは一択。連立方程式で解こう。ここからはほぼ抜け道祭り。準備として，n 回目に自転車が歩行者に追いつくときの時刻と座標の数列を c_n，d_n とおいておく。そうすると，簡単に以下のような表を作ることができる。

a_n	2	8	24	$\cdots$
b_n	2	7	22	$\cdots$

c_n	4	15	46	$\cdots$
d_n	4	14	44	$\cdots$

ここから連立方程式祭りの幕開け！

表から，$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ は以下のようにして秒殺できる。$a_{n+1} = a_n + \alpha b_n + \beta$ とおいて，$n = 1, 2$ のときで連立方程式を解いてやるだけである。同じく，$b_{n+1} = 3b_n + \alpha$ とおいて，同様に解くだけ。$\boxed{\text{ケコ}}$ は正攻法と裏技のハイブリッド式で解きたい。b_n は漸化式でもっとも有名な形なので，瞬時に $b_n = \frac{5}{2}3^{n-1} - \frac{1}{2}$ と出してほしい。a_n については，階差型の漸化式であることから直ちにできて欲しいが，階差型が苦手な受験生も多いので裏技を使ってもよい。ちょっと選択肢が多いので時間がかかるかもしれないが，$n = 1, 2, 3, \cdots$ と代入して当たりをみつけていこう。$n = 1$ のときはうまいこと全て 2 になるようにできている。なんというこざかしさ !! ただ，$n = 2$ を入れると，⑤と⑨のみ残るのでそこまで面倒ではない。

(2) 単なる計算

この問題は，本当にヒドイ。真面目に a_n，b_n を解いてきても一筋縄でいかないようにできている。そう，こいつが先ほど作った架空の数列 c_n，d_n に関する問題だからだ。$\boxed{\text{サ}}$ に関しては，a_n から判断できるが，$\boxed{\text{シスセ}}$ が厳しい。ただ，$y = 300$ であったのには感謝したい。($y = 5000$ とかになると，流石に c_n，d_n を出さないといけなくなる。) 後は，先ほど出した a_n，b_n から，c_n，d_n の表を少し追加すればよいだけだ。

a_n	2	8	24	70	206	$\cdots$
b_n	2	7	22	67	202	$\cdots$

c_n	4	15	46	137	$\cdots$
d_n	4	14	44	134	$\cdots$

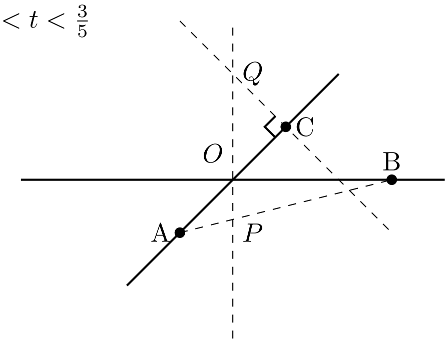
となり，$\boxed{\text{シスセ}}$ を出すことができる。途中までやれば感がよければ $d_n = 2b_n$ も気付くので意外とすぐに答えはみつかる。ただ，このような数学とは思えない解き方をしない限り時間を消費するだけの悪問といえよう。

第 **5** 問

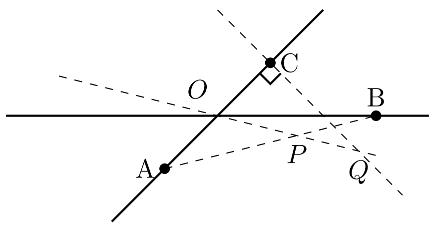
(1)(2) ベクトルの標準問題

$\boxed{ア}$ ～ $\boxed{シ}$ は基本のベクトル問題なので図を書くこともなく，ベクトルをいじるだけで答を出せる。（使うのは内積の公式と性質のみ）ただ，ここからにわかに文章が増えてくる。領域が出てきたので図を書いていなかった人もここで書くはめになる。。。たいして難しい設定ではないのだが数学の問題でここまで文章を読まされる経験がないので耐性がついていない。いざ，$\boxed{スセ}$ を解くわけだが図を正確に書かないと解けない。条件より，$\triangle OAP$ が鈍角三角形（$\angle AOP$ が鈍角）となる。その上で，$\angle OCQ = 90^\circ$ となる Q がどこにあるべきか考えないといけない。以下が，t の場合分けによる Q の位置になる。とても良い問題ではあると思うが，図を与えて解きやすくするなどの時間内処理に対する配慮がほしかった。

(i) $0 < t < \frac{3}{5}$



(ii) $\frac{3}{5} < t < 1$



(3) 太郎と花子の戯れあい

本日，4 度目の太郎と花子の戯れである。（IA も含めると 6 回目…）$\boxed{ソ}$ に関しては，代入するだけなので問題ないのでサッサと解いてしまおう。問題は $\boxed{タ}$ 以降である。結論から言うと，こいつらの会話を気にしてはいけない。会話部分を無視していけば，大事な部分だけを抜粋してくれているからだ。「直線 OA に関して，点 Q と対象な点を R とする」という文言から，$\overrightarrow{CR} = -\overrightarrow{CQ} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ は自明である。これで，$\boxed{タ}$ ～ $\boxed{ツ}$ は難なく埋められた。ラストの $\boxed{テト}$ についても，同様に二人の会話はわからなくていい。$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ となるので，①より，$k = \frac{3}{4}$ が導かれる。この問題についても，二次試験に出すなら奥深くとても良い問題なのだが，時間制限のシビアな共通テストで出すのは厳しすぎるのではないだろうか。